السؤال الأول : 40 نقطة

1. $D = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ①
1. $E = \mathbb{R}$
1. $y = 4$ — معادلة حل وحيد — ②
1. $f(\lim_{x \to +\infty} f(x)) = f(3) = 4$ ③

السؤال الثاني: 40 نقطة

ω خيالي صرف

$\overline{\omega} = -\omega$

$\frac{\overline{z} - i}{1 - 3i\overline{z}} = \frac{-z - i}{1 + 3iz}$

$\overline{z} + 3i\overline{z}z - i + 3z = -z - i + 3iz\overline{z} - 3\overline{z}$

$4\overline{z} = -4z \Rightarrow \overline{z} = -z$

مجموعة الأعداد المحققة للشرط هي

مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة أي $i\mathbb{R}$

السؤال الثالث: 40 نقطة

f تابع عددي، (C) تمثيلها البياني

معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$

$A(0,1)$ $x_0 = 0$ ، $y_0 = 1$

$x' = 2x_0 - x = -x$

① $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$ محققة

② $f(x) + f(x') \overset{?}{=} 2y_0 = 2$

$x + 1 + \frac{1}{x} - x + 1 - \frac{1}{x} = 2$ صحيحة

إذن A(0,1) مركز تناظر لـ (C)

السؤال الرابع: 40 نقطة

① $z_1 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

② $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$

③ بالمطابقة بين الشكل الجبري لـ $\frac{z_1}{z_2}$

نجد $\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

التمرين الأول : 60 نقطة

① $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AD}\| \cos 30$

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$\vec{AB} \cdot \vec{EG} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB}(\vec{AB} + \vec{AD})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

$= 16 + 8\sqrt{3}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB}(\vec{AC} + \vec{CG})$

$= \vec{AB}(\vec{AC} + \vec{AE}) = \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AE}$

$= 16 + 8\sqrt{3} + 4 \times 4 \cos 60$

$= 16 + 8\sqrt{3} + 8 = 24 + 8\sqrt{3}$

② $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AF} + \vec{EJ}$ لأن

$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ}$ لأن

التمرين الثاني : 60 نقطة

① $y_n = x_n - 3$ ⟸ $y_{n+1} = x_{n+1} - 3$

$y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}x_n - 2$

$= \frac{2}{3}(x_n - 3) = \frac{2}{3}y_n$

(y_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ لأن

$y_0 = x_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

② $y_n = y_0 q^n \Rightarrow y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

③ $S_n = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$

$= 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ لأن

حدها الأول 1

$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$

$= 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\arg\left(\frac{z_{C'}-z_{B'}}{z_M-z_A}\right)=\arg(2i)$$

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'})=\frac{\pi}{2}$$

$$(B'C')\perp(AM)$$

$$\left|\frac{z_{C'}-z_{B'}}{z_M-z_A}\right|=|2i|$$

$$\frac{B'C'}{AM}=2 \Rightarrow B'C'=2AM$$

التمرين الثاني : 6 نقط

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-a}{(x-1)^2}$$

$$f'(2)=0 \Rightarrow \frac{4-4-a}{1}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a=0}$$

$$g(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$x^2 \div (x-1) = x+1 \text{ والباقي } 1$$

$$y_\Delta = x+1$$ نعرف

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

$-\infty, +\infty$ بجوار $y_\Delta=x+1$ مقاربة مائلة

$$g'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x)=0$$

$$x^2-2x=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$$

$$g(0)=0 \quad , \quad g(2)=4$$

$$y=0 \quad , \quad y=4$$ المماسان الأفقيان

التمرين الثالث : 6 نقط

المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\vec{u},\vec{v})$

M منتصف $[BC]$ $\quad z_M=m=\frac{b+c}{2}$

C' صورة C بالدوران R مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c'=ic$$

B' صورة B بالدوران R مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b'=-ib$$

$$z_{\overrightarrow{B'C'}}=z_{C'}-z_{B'}=c'-b'$$

$$=i(b+c)$$

$$z_{\overrightarrow{AM}}=z_M-z_A=m-a=\frac{b+c}{2}$$

$$\frac{z_{C'}-z_{B'}}{z_M-z_A}=\frac{i(b+c)}{\frac{b+c}{2}}=2i$$

التمرين الأول : 6 نقط

$$x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}$$ لدينا (1)

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+4}=\sqrt{x^2+4}=f(x)$$

الدالة f زوجية، فمنحنى البياني متناظر بالنسبة لحامل المحور التراتيب

(2)

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+4}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=+\infty-\infty$$ ح.غ.ت

$$f(x)-y_\Delta=\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\frac{4}{+\infty}=0$$

ومنه $y_\Delta=x$ مقاربة مائلة

للخط البياني C بجوار $+\infty$

فإن الخط البياني متناظر بالنسبة لحامل المحور التراتيب

ولهذا نظير المقاربة $\Delta: y=x$

بالنسبة لحامل التراتيب $\Delta': y=-x$

(2) $dist(E,Q) = \frac{|4x_0 + 2y_0 + 4z_0 - 9|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}}$

$= \frac{1}{6}$

(3) $I(1,0,1)$ $J(2, \frac{1}{2}, 2)$

$\vec{IJ}(1, \frac{1}{2}, 1)$ $\vec{BG}(0,1,2)$ $\vec{EF}(2,0,0)$

$\vec{BG}, \vec{EF}$ غير مرتبطين خطياً

لأن مركباتهما غير متناسبة

$\vec{IJ} = \alpha \vec{BG} + \beta \vec{EF}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$1 = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \alpha$ ومنه

$1 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BG} + \frac{1}{2}\vec{EF}$

$\vec{IJ}$ و $\vec{BG}$ و $\vec{EF}$ مرتبطة خطياً

(4) $x^2 + z^2 - \frac{R^2}{h^2} y^2 = 0$

$\begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 0 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$h = 1$, $R = 1$

(3)

التمرين الأول

(1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

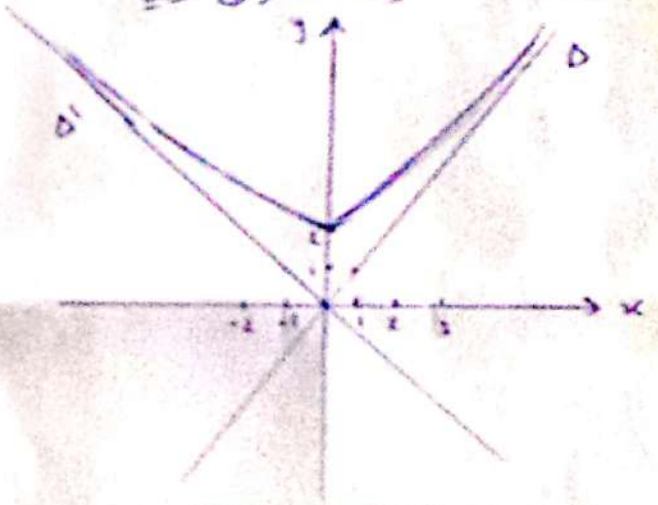
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 2$ قيمة صغرى محلية



التمرين الثاني (04 نقاط)

(1) $A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $D(0,1,0)$

$E(0,0,2)$ $C(2,1,0)$ $F(2,0,2)$

$H(0,1,2)$ $G(2,1,2)$

$M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري لـ $[AG]$

$AM^2 = GM^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$

بالنشر والاختصار نجد

$Q : 4x + 2y + 4z - 9 = 0$

$H(0,1,2) \Rightarrow 4(0) + 2(1) + 4(2) - 9 = 1 \neq 0$

النقطة H لا تنتمي الى المستوي المحوري لـ $[AG]$